

On homogenization estimates in Neuman boundary value problem for an elliptic equation with multiscale coefficients

S. E. PASTUKHOVA, R. N. TIKHOMIROV

Homogenization of a scalar elliptic equation in a bounded domain with Neuman boundary condition is studied. Coefficients of the operator are oscillating over two different groups of variables with different small periods ε and $\delta = \delta(\varepsilon)$. We assume that δ/ε tends to zero as ε tends to zero. It is known that the limit problem is obtained through reiterated homogenization procedure and corresponds to an elliptic equation with constant coefficients. The difference for resolvents of the initial and the limit problems is estimated in operator $(L^2 \rightarrow L^2)$ -norm. This estimate is of order $\tau = \tau(\varepsilon)$ which is the maximum of ε and δ/ε . We find also the approximation of the initial resolvent in operator $(L^2 \rightarrow H^1)$ -norm, it is of order $\sqrt{\tau}$.

В теории усреднения наблюдается повышенный интерес к L^2 - и H^1 -оценкам операторного типа для задач с осциллирующими коэффициентами, начавшийся после выхода работы М.Ш. Бирмана и Т.А. Суслиной [1]. Оценки называются операторными, потому что их можно сформулировать в операторных нормах в терминах резольвент исходной и усредненной задач и, быть может, некоторых корректирующих операторов. Настоящая работа продолжает цикл работ [2]–[11], где операторные оценки усреднения доказаны для разнообразных уравнений модифицированным методом первого приближения, предложенным В.В. Жиковым в [2]. Отличительные черты этого метода – введение дополнительного параметра интегрирования (за счет прямого сдвига или в скрытом виде за счет сглаживания по Стеклову), а также специальный анализ первого приближения, или H^1 -приближения. В указанных работах были изучены эллиптические уравнения резольвентного типа во всем пространстве, в том числе, векторные уравнения теории упругости, а также соответствующие краевые задачи в области с условием Дирихле и Неймана на границе. В данной статье рассматривается скалярное эллиптическое уравнение с двухмасштабными коэффициентами. Коэффициенты уравнения осциллируют по двум группам переменных с периодами ε и $\delta = \delta(\varepsilon)$ разного порядка малости при $\varepsilon \rightarrow 0$. Будем считать для определенности $\delta(\varepsilon)$ большего порядка малости, чем ε , то есть $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. Для задачи Неймана в ограниченной области получена L^2 -оценка погрешности усреднения. Эта оценка порядка $\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}$. Она является следствием H^1 -оценки погрешности усреднения, которая имеет порядок $\max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\}$. Чтобы доказать оценки, используется H^1 -приближение, в котором участвует сглаживание по Стеклову. Это приближение для скалярной задачи может быть выбрано более простого вида, чем в общем случае, охватывающем и векторные задачи. Хотя задача двухмасштабна, а именно, содержит два типа быстрых переменных, сглаживание по Стеклову берется только с одним параметром сглаживания. Такое сглаживание сильно упрощает конструкцию H^1 -приближения.

1. Постановка задачи и основной результат

Введем пространства функций с условием ортогональности

$$\tilde{L}^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} u \, dx = 0\}, \quad \tilde{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u \, dx = 0\}.$$

Рассмотрим краевую задачу Неймана в ограниченной липшицевой области $\Omega \in \mathbb{R}^d$ для эллиптического уравнения второго порядка

$$u^\varepsilon \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad f \in \tilde{L}^2(\Omega). \quad (1)$$

Матрица $a^\varepsilon(x)$ не обязательно симметрична и имеет "двухмасштабную" структуру

$$a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}\right), \quad (2)$$

где элементы матрицы $a(y, z)$ измеримы и периодичны по y и z , ячейкой периодичности служит куб $Y = Z = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$ в задаче (1) имеем быстро осциллирующие коэффициенты, ε - и δ -периодические по первой и второй группе переменных. Для определенности

$$\delta = \delta(\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Дополним условия на $a(y, z)$:

$$\begin{aligned} |a(y, z) - a(y', z)| &\leq c_L |y - y'|, \\ \mu |\xi|^2 &\leq a(y, z) \xi \cdot \xi, \quad a(y, z) \xi \cdot \eta \leq \mu^{-1} |\xi| |\eta| \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d, \quad \mu > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

для почти всех $z \in \mathbb{R}^d$ и всех $y, y' \in \mathbb{R}^d$.

Существование единственного решения задачи (1) гарантировано условиями ортогональности и получается по теореме Лакса – Мильграма. Выполнено энергетическое равенство

$$\int_{\Omega} a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} f u^\varepsilon \, dx,$$

из которого следует энергетическая оценка

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

в силу неравенства Пуанкаре

$$\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \leq C_P \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \left(\int_{\Omega} u \, dx \right)^2 \right).$$

С задачей (1) связана усредненная задача

$$u \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} a^0 \nabla u^0 \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad f \in \tilde{L}^2(\Omega), \quad (4)$$

где a^0 – постоянная эллиптическая матрица, ее точное определение дано ниже через решения вспомогательных задач на ячейке периодичности.

Будем предполагать, что область достаточно гладкая, например класса $C^{1,1}$, так что по эллиптической теории решение задачи (4) принадлежит пространству $H^2(\Omega)$ с оценкой

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad c_0 = \text{const}(d, \mu, \Omega), \quad (5)$$

кроме того, существует линейный ограниченный оператор продолжения

$$\mathcal{P} : H^2(\Omega) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^d). \quad (6)$$

Всегда считаем, что решение задачи (4), если нужно, продолжено во внешность области Ω с помощью оператора \mathcal{P} и это продолжение также обозначаем через u .

Справедлива

Теорема 1.1. Для разности решений (1) и (4) имеет место оценка

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (7)$$

где константа C зависит лишь от размерности d , постоянных μ , c_L и области Ω .

Оценка (7) выводится из соответствующей H^1 -оценки (см. (28)), доказательству которой посвящена основная часть настоящей работы.

2. Задачи на ячейке

Матрица a^0 определяется в процессе повторного усреднения. Введем некоторые обозначения: e^1, \dots, e^d – канонический базис в \mathbb{R}^d ; $\langle \cdot \rangle_Z = \int_Z \cdot dz$ – среднее по ячейке; $H^1(Y) = H_{per}^1(Y)$, $H^1(Z) = H_{per}^1(Z)$, $H^2(Y) = H_{per}^2(Y)$ и т.д. – соболевские пространства периодических функций.

Нам понадобятся следующие задачи на ячейке периодичности:

$$M_j(y, \cdot) \in H^1(Z), \quad \operatorname{div}_z[a(y, z)(e^j + \nabla_z M_j(y, z))] = 0, \quad \langle M_j(y, \cdot) \rangle_Z = 0, \quad (8)$$

$$N_j \in H^1(Y), \quad \operatorname{div}_y[\hat{a}(y)(e^j + \nabla N_j(y))] = 0, \quad \langle N_j \rangle_Y = 0, \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (9)$$

Здесь

$$\hat{a}(y) = \langle a(y, \cdot)(I + \nabla_z M(y, \cdot)) \rangle_Z$$

является "промежуточной" усредненной матрицей, I – единичная $(d \times d)$ -матрица, а $M(y, z)$ – вектор с координатами $M_j(y, z)$. Окончательной усредненной матрицей будет

$$a^0 = \langle \hat{a}(I + \nabla_y N) \rangle_Y.$$

Усредненные матрицы \hat{a} и a^0 подчинены условиям типа (3), так что обе задачи на ячейке, а также усредненная задача поставлены корректно.

Решения задач на ячейке обладают следующими свойствами.

Лемма 2.1. Пусть $M_j(y, z)$ и $N_j(y)$ – решения уравнений (8) и (9). Тогда

- i) $\|M_j(y, \cdot)\|_{H^1(Z)} \leq c$, $c = \operatorname{const}(\mu)$;
- ii) $M_j(y, \cdot)$ – липшицева по $y \in Y$ функция со значениями в $H^1(Z)$ с константой Липшица, зависящей лишь от постоянных μ и c_L ;
- iii) матрица $\hat{a}(y)$ – липшицева с константой $c = \operatorname{const}(\mu, c_L)$;
- iv) $N_j, \nabla_y N_j \in L^\infty(Y)$;
- v) $\nabla_y^2 N_j \in L^p(Y) \quad \forall p \geq 1$;
- vi) $\|M_j(y, \cdot)\|_{L^\infty(Z)} \leq c$ для всех y .

Доказательство леммы приведено в § 7.

Введем периодические векторы, связанные с задачами на ячейке,

$$p^j(y, z) = a(y, z)(e^j + \nabla_z M_j(y, z)) - \hat{a}(y)e^j, \quad g^j(y) = \hat{a}(y)(e^j + \nabla_y N_j(y)) - a^0 e^j. \quad (10)$$

Первый из них представляет собой соленоидальный по z вектор с нулевым средним:

$$\langle p^j(y, \cdot) \rangle_Z = 0, \quad \operatorname{div}_z p^j(y, z) = 0 \quad (11)$$

для всех y , второй – также соленоидальный вектор с нулевым средним:

$$\langle g^j \rangle_Y = 0, \quad \operatorname{div} g^j(y) = 0. \quad (12)$$

Известно [13, гл. I, §1], что такие векторы можно представить в виде дивергенции от кососимметрической матрицы. В наших предположениях это представление, для векторов из (10), обладает дополнительными свойствами.

Лемма 2.2. Пусть g^j и p^j – векторы из (10). Тогда найдутся такие кососимметрические матрицы $G^j \in H^1(Y)^{d \times d}$ и $P^j(y, \cdot) \in H^1(Z)^{d \times d}$, что справедливы представления:

- a) $g^j(y) = \operatorname{div} G^j(y)$;
- b) $p^j(y, z) = \operatorname{div}_z P^j(y, z)$.

При этом

$$\begin{aligned} \|G^j\|_{H^1(Y)^{d \times d}} &\leq c \|g^j\|_{L^2(Y)^d}, \\ \|P^j(y, \cdot)\|_{H^1(Z)^{d \times d}} &\leq c \|p^j(y, \cdot)\|_{L^2(Z)^d} \end{aligned} \quad (13)$$

с константой $c = \operatorname{const}(d, \mu)$. Кроме того,

$$g^j \in L^\infty(Y)^d, \quad G^j \in L^\infty(Y)^{d \times d} \quad (14)$$

и матрица $P^j(y, z)$ липшицева по y со значениями в $H^1(Z)^{d \times d}$, что влечет оценку для ее элементов

$$\|\nabla_y P_{ik}^j(y, \cdot)\|_{H^1(Z)^d} \leq c, \quad c = c(\mu, c_L), \quad (15)$$

для почти всех y .

Доказательство. Сопоставим вектору $g^j = \{g_k^j\}$ задачу на ячейке Y

$$\Delta \varphi_k^j = g_k^j, \quad \langle \varphi_k^j \rangle_Y = 0, \quad k = 1, \dots, d. \quad (16)$$

Решение φ_k^j существует и единственно. Справедлива оценка

$$\|\varphi_k^j\|_{H^2(Y)} \leq c \|g_k^j\|_{L^2(Y)}. \quad (17)$$

В силу соленоидальности вектора g^j выполнено соотношение

$$\Delta \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial y_k} = \frac{\partial g_k^j}{\partial y_k} = 0, \quad k = 1, \dots, d,$$

(как обычно, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до d , если не оговорено противное). Таким образом, $\operatorname{div} \varphi^j$ – периодическая гармоническая функция, $\langle \operatorname{div} \varphi^j \rangle_Y = 0$, следовательно, $\operatorname{div} \varphi^j = 0$.

Введем кососимметрическую матрицу $G^j = \{G_{ik}^j\}$, такую что

$$G_{ik}^j = \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial y_i} - \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial y_k}, \quad (18)$$

и проверим равенство $\operatorname{div} G^j = g^j$. В самом деле,

$$\frac{\partial G_{ik}^j}{\partial y_i} = \Delta \varphi_k^j - \frac{\partial}{\partial y_k} \operatorname{div} \varphi^j = \Delta \varphi_k^j = g_k^j,$$

и представление а) получено. Оценка (13)₁ следует из (18), (17).

Свойство $(14)_1$ следует из опеределения g^j и ограниченности ∇N_j (см. лемму 2.1, *iv*)). Тогда свойство $(14)_2$ обеспечено эллиптической теорией и теоремами вложения: как решение уравнения (16) функция φ_k^j принадлежит $W^{2,p}(Y)$, $\forall p \geq 1$, и, значит, ограничены ее производные, а также G_{ik}^j в силу (18).

Аналогично, матрица $P^j = \{P_{ik}^j\}$ определяется своими элементами

$$P_{ik}^j = \frac{\partial \psi_k^j}{\partial z_i} - \frac{\partial \psi_i^j}{\partial z_k},$$

где $\psi_k^j(y, \cdot) \in H^2(Z)$ есть решение уравнения

$$\Delta_z \psi_k^j(y, z) = p_k^j(y, z), \quad \langle \psi_k^j(y, \cdot) \rangle_Z = 0, \quad k = 1, \dots, d. \quad (19)$$

Правая часть $\psi_k^j(y, \cdot)$ липшицева по y со значениями в $L^2(Z)$, согласно определению $(10)_1$ и свойствам липшицевости участвующих в нем функций $a(y, z)$, $M(y, z)$ и $\hat{a}(y)$. Из (19) вытекает уравнение

$$\Delta_z [\psi_k^j(y + h, z) - \psi_k^j(y, z)] = p_k^j(y + h, z) - p_k^j(y, z),$$

из которого получаем оценки

$$\|\psi_k^j(y + h, \cdot) - \psi_k^j(y, \cdot)\|_{H^2(Z)} \leq c \|p_k^j(y + h, \cdot) - p_k^j(y, \cdot)\|_{L^2(Z)^d} \leq C|h|,$$

$$\|P^j(y + h, \cdot) - P^j(y, \cdot)\|_{H^1(Z)^{d \times d}} \leq c \|p^j(y + h, \cdot) - p^j(y, \cdot)\|_{L^2(Z)^d} \leq C|h|,$$

что доказывает липшицевость $P^j(y, \cdot)$ со значениями в $H^1(Z)^{d \times d}$. Следовательно, градиент $\nabla_y P_{ik}^j(y, \cdot)$ существует как ограниченная функция со значениями в $H^1(Z)^d$ и справедливо соотношение (15). Лемма доказана.

3. Первое приближение

В соответствии с оценкой (7) функцию u называют L^2 -приближением к u^ε . Чтобы аппроксимировать u^ε в H^1 -норме, требуется к нулевому приближению u добавить корректор. Так получаем первое приближение

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N(y) \cdot \nabla u(x) + \delta M(y, z) \cdot (I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad z = \frac{x}{\delta}, \quad (20)$$

которое рассматривалось, например в [14]. Посмотрим, насколько регулярна функция v^ε в наших предположениях.

Свойства функций N_j , M_j (см. лемму 2.1, *iv*), *vi*)) обеспечивают принадлежность v^ε пространству $L^2(\Omega)$. Действительно, для составляющих корректора имеют место оценки

$$\int_{\Omega} \left| N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla u(x) \right|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx, \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} \left| M\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}\right) \cdot (I + \nabla_y N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) \nabla u(x) \right|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

так как $N, \nabla_y N_j \in L^\infty(Y)^d$ и $M(y, \cdot) \in L^\infty(Z)$ для всех y . Для градиента ∇v^ε подобная оценка в $L^2(\Omega)$ не пройдет из-за вхождения в его структуру неограниченных функций $\nabla_y M$, $\nabla_z M$ и $\nabla^2 N$.

Чтобы обойти это препятствие будем брать вместо (20) первое приближение со сглаженным корректором, а именно:

$$\begin{aligned}\hat{v}^\varepsilon(x) &= u(x) + \varepsilon \int_Z N(y') \cdot \nabla u(x') d\sigma + \delta \int_Z M(y', z) \cdot (I + \nabla_y N(y')) \nabla u(x') d\sigma, \\ x' &= x - \delta\sigma, \quad y' = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \quad z = \frac{x}{\delta}.\end{aligned}\tag{22}$$

Будем также использовать более компактное представление $\hat{v}^\varepsilon(x)$ в виде суммы нулевого приближения $u(x)$ и корректора $K_\varepsilon(x)$:

$$\hat{v}^\varepsilon(x) = u(x) + K_\varepsilon(x), \quad K_\varepsilon(x) = \varepsilon K_{\varepsilon,1}(x) + \delta(\varepsilon) K_{\varepsilon,2}(x).\tag{23}$$

Объясним роль дополнительного параметра интегрирования, введенного в первое приближение (22).

Лемма 3.1. Пусть $b(y, z) \in L^\infty(Y, L^2_{per}(Z))$ и $u(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Тогда функция

$$w(x) = \int_Z b(y', z) u(x') d\sigma, \quad y' = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \quad z = \frac{x}{\varepsilon}, \quad x' = x - \delta\sigma,$$

принадлежит $L^2(Q)$ с оценкой

$$\|w\|_{L^2(Q)} \leq \sup_y \|b(y, \cdot)\|_{L^2(Z)} \|u\|_{L^2(Q_\varepsilon)}.\tag{24}$$

где Q – произвольная область в \mathbb{R}^d , а Q_ε – ε -окрестность Q .

Доказательство. Используя неравенство Коши – Буняковского и замену переменных $x \rightarrow x' = x - \delta\sigma$, получим цепочку соотношений

$$\begin{aligned}\int_Q |w(x)|^2 dx &\leq \int_Q \int_Z \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 |u(x - \delta\sigma)|^2 dx d\sigma \leq \\ &\leq \int_{Q_\varepsilon} \int_Z \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} + \sigma\right) \right|^2 |u(x)|^2 dx d\sigma = \int_{Q_\varepsilon} |u(x)|^2 \left(\int_Z \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} + \sigma\right) \right|^2 d\sigma \right) dx.\end{aligned}\tag{25}$$

Ввиду периодичности функции $b(y, \cdot)$, внутренний интеграл оценивается величиной $\sup_y \|b(y, \cdot)\|_{L^2(Z)}^2$, которая выносится за пределы внешнего интеграла, и в результате приходим к неравенству (24). Лемма доказана.

Теперь можно показать, что $\nabla \hat{v}^\varepsilon \in L^2(\Omega)$. Запишем градиент как сумму

$$\begin{aligned}\nabla v^\varepsilon(x) &= \nabla u(x) + \int_Z \nabla_y N(y') \nabla u(x') d\sigma + \int_Z \nabla_z M(y', z) (I + \nabla_y N(y')) \nabla u(x') d\sigma + \\ &+ \frac{\delta}{\varepsilon} \int_Z \nabla_y [M(y', z) \cdot (I + \nabla_y N(y')) \nabla u(x')] d\sigma + \varepsilon \int_Z \nabla^2 u(x') N(y') d\sigma + \\ &+ \delta \int_Z (I + \nabla_y N(y')) \nabla^2 u(x') M(y', z) d\sigma, \quad y' = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \quad x' = x - \delta\sigma, \quad z = \frac{x}{\delta},\end{aligned}$$

и изучим каждое слагаемое. Для второго, пятого и шестого слагаемых достаточно воспользоваться свойствами iv), vi) из леммы 2.1 и оценкой (5), а для третьего – применить лемму 3.1. Четвертое слагаемое требует более детального анализа. Оно разбивается в сумму:

$$\begin{aligned} & \int_Z \nabla_y [M(y', z) \cdot (I + \nabla_y N(y')) \nabla u(x')] d\sigma = \\ & = \int_Z \nabla_y M(y', z) (I + \nabla_y N(y')) \nabla u(x') d\sigma + \int_Z \nabla_y^2 N(y') \nabla u(x') \cdot M(y', z) d\sigma = T_1 + T_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя неравенство Коши – Буняковского и ограниченность ∇N , имеем оценку

$$|T_1|^2 \leq c \int_Z |\nabla_y M(y', z) \nabla u(x')|^2 d\sigma,$$

к мажоранте которой применимо неравенство (25). Слагаемое T_2 оценивается несколько иначе. Прежде всего запишем неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |T_2|^2 dx &= \int_{\Omega} \left| \int_Z \nabla_y^2 N(y') \nabla u(x') \cdot M(y', z) d\sigma \right|^2 dx \leq C \int_{\Omega} \int_Z |\nabla_y^2 N(y') \nabla u(x')|^2 d\sigma dx \leq \\ &\leq C \int_{\Omega_{\varepsilon}} |\nabla_y^2 N(y)|^2 |\nabla u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega_1} |\nabla_y^2 N(y)|^2 |\nabla u(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

где использовали неравенство Коши – Буняковского и замену переменных, а также учли ограниченность функции N и перешли к области интегрирования $\Omega_1 \supset \Omega_{\varepsilon}$. Проверим, что последний интеграл ограничен. Перепишем его в виде

$$\int_{\Omega_1} \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Phi(x) dx.$$

Здесь $\Phi \in L^{1+\gamma}(\Omega_1)$, $\gamma > 0$, по теореме вложения, так как $\nabla u \in H^1(\Omega_1)$, а $\beta \in L_{per}^q(Y)$ при любом сколь угодно большом q (см. лемма 2.1, v)). Тогда по неравенству Гельдера

$$\int_{\Omega_1} \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Phi(x) dx \leq \left(\int_{\Omega_1} |\beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega_1} |\Phi(x)|^{1+\gamma} dx \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} = C_{\Phi} \left(\int_{\Omega_1} |\beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad q = \frac{1+\gamma}{\gamma}, \quad (27)$$

где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_1} \left| \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^q dx = |\Omega_1| \int_Y |\beta(y)|^q dy$$

по свойству среднего значения периодической функции. Величина $C_{\Phi} = \|\Phi\|_{L^{1+\gamma}(\Omega_1)}$ контролируется нормой $\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega_1)}$, где u – продолженное на \mathbb{R}^d с помощью оператора \mathcal{P} (см. (6)) решение усредненной задачи. В итоге заключаем, что $\hat{v}^{\varepsilon} \in H^1(\Omega)$.

Дальнейшей целью будет

Теорема 3.1. *Для разности u^{ε} – решения задачи (1) и функции \hat{v}^{ε} , определенной в (22), имеет место оценка*

$$\|u^{\varepsilon} - \hat{v}^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (28)$$

где константа C того же типа, что и в (7).

Параграфы §4-5 посвящены доказательству теоремы 3.1.

Для задачи Неймана с ε -периодической матрицей $a^\varepsilon(x)=a(x/\varepsilon)$ H^1 -оценка порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ впервые получена в [5], как для скалярного уравнения так и для системы теории упругости. В настоящей работе предложенный в [5] метод адаптируется для многомасштабных задач с учетом специфики скалярного случая. Общий подход, применимый для векторных многомасштабных задач, развивался в [12].

4. Оценка невязки

Справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla \hat{v}^\varepsilon - a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) \cdot \varphi dx = \int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla \hat{v}^\varepsilon - a^0 \nabla u) \cdot \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega), \quad (29)$$

поскольку

$$\int_{\Omega} a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx = \int_{\Omega} a^0 \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega),$$

в силу уравнений (1) и (4). Введем обозначение для разности потоков

$$\hat{R}_\varepsilon \equiv a^\varepsilon \nabla \hat{v}^\varepsilon - a^0 \nabla u. \quad (30)$$

Тогда в силу (29)

$$\int_{\Omega} \hat{R}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla \hat{v}^\varepsilon - a^0 \nabla u) \cdot \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega). \quad (31)$$

Предположим, что доказана оценка

$$\int_{\Omega} \hat{R}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx \leq C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (32)$$

Тогда, полагая в ней $\varphi = \hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon$ и оценивая форму (31) снизу в силу равенства (29) и эллиптичности матрицы a^ε , можно получить

$$\|\nabla(u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (33)$$

что является частью оценки (28). Этим мотивирован наш интерес к оценке (32).

Прежде чем оценивать сверху форму (31), попробуем оценить аналогичную форму, в которой вместо \hat{R}_ε стоит разность

$$R_\varepsilon = a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a^0 \nabla u$$

с обычным первым приближением v^ε , определенным в (20).

Запишем

$$\begin{aligned} \nabla v^\varepsilon(x) &= (I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x) + \nabla_z M(y, z) (I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x) + \\ &+ \varepsilon \nabla^2 u(x) N(y) + \frac{\delta}{\varepsilon} \nabla_y [M(y, z) \cdot (I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x)] + \\ &+ \delta (I + \nabla_y N(y)) \nabla^2 u(x) M(y, z). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_\varepsilon &= a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a^0 \nabla u = \\ &= a(y, z)(I + \nabla_z M(y, z))(I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x) - \hat{a}(y)(I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x) + \\ &\quad \hat{a}(y)(I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x) - a^0 \nabla u(x) + r_\varepsilon^1, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} r_\varepsilon^1 &= a(y, z) \left(\varepsilon \nabla^2 u(x) N(y) + \frac{\delta}{\varepsilon} \nabla_y [M(y, z)(I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x)] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon (I + \nabla_y N(y)) \nabla^2 u(x) M(y, z) \right), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad z = \frac{x}{\delta}. \end{aligned} \quad (35)$$

Используя векторы (10), можно записать вторую разность в (34) как

$$\begin{aligned} \hat{a}(y)(I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x) - a^0 \nabla u(x) &= [\hat{a}(y)(I + \nabla_y N(y)) e^j - a^0 e^j] \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \\ &= [\hat{a}(y)(e^j + \nabla_y N_j(y)) - a^0 e^j] \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \stackrel{(10)_2}{=} g^j(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \end{aligned}$$

и первую разность в (34) как

$$\begin{aligned} a(y, z)(I + \nabla_z M(y, z))(I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x) - \hat{a}(y)(I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x) &= \\ &= [a(y, z)(I + \nabla_z M(y, z)) - \hat{a}(y)](\nabla u(x) + \nabla_y N(y) \nabla u(x)) = \\ &= [a(y, z)(I + \nabla_z M(y, z)) - \hat{a}(y)] e^j \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} (N(y) \cdot \nabla u(x)) \right) = \\ &= [a(y, z)(e^j + \nabla_z M_j(y, z)) - \hat{a}(y) e^j] \zeta_j(x, y) \stackrel{(10)_1}{=} p^j(y, z) \zeta_j(x, y), \end{aligned}$$

где

$$\zeta_j(x, y) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} (N(y) \cdot \nabla u(x)).$$

В итоге равенство (34) представляется в виде суммы

$$R_\varepsilon(x) = \zeta_j(x, y) p^j(y, z) + \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} g^j(y) + r_\varepsilon^1(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad z = \frac{x}{\delta}, \quad (36)$$

где первые слагаемые в силу леммы 2.2 можно записать как

$$r_\varepsilon^2 \equiv g^j(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \varepsilon \operatorname{div} \left(G^j(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) - \varepsilon G^j(y) \nabla \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} r_\varepsilon^3 \equiv p^j(y, z) \zeta_j(x, y) &= \delta \operatorname{div} (P^j(y, z) \zeta_j(x, y)) - \frac{\delta}{\varepsilon} \operatorname{div}_y (P^j(y, z) \zeta_j) - \delta P^j(y, z) \nabla_x \zeta_j, \\ \zeta_j(x, y) &= \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} (N(y) \cdot \nabla u(x)). \end{aligned} \quad (38)$$

Из (34) – (38) получаем равенство

$$\int_{\Omega} R_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} r_\varepsilon^i \cdot \nabla \varphi dx. \quad (39)$$

Введем гладкую функцию $\theta^\varepsilon(x)$, сосредоточенную в ε -окрестности границы $\Gamma = \partial\Omega$, такую что

$$\operatorname{supp} \theta^\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon(x)|_\Gamma = 1, \quad 0 \leq \theta^\varepsilon(x) \leq 1, \quad |\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon(x)| \leq c. \quad (40)$$

Используя срезающую функцию $\theta^\varepsilon(x)$, в (39) можно заменить слагаемые r_ε^2 и r_ε^3 из (37) и (38) на их аналоги со срезающей функцией

$$\begin{aligned}\tilde{r}_\varepsilon^2 &= \varepsilon \operatorname{div} \left(\theta^\varepsilon(x) G^j(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) - \varepsilon G^j(y) \nabla_x \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right), \\ \tilde{r}_\varepsilon^3 &= \delta \operatorname{div}(\theta^\varepsilon(x) P^j(y, z) \zeta_j(x, y)) - \frac{\delta}{\varepsilon} \operatorname{div}_y(P^j(y, z) \zeta_j(x, y)) - \delta P^j(y, z) \nabla_x \zeta_j(x, y).\end{aligned}\tag{41}$$

Действительно, функция $(1 - \theta^\varepsilon(x))$ обращается в нуль в окрестности границы $\partial\Omega$ и вектор $\operatorname{div} \left((1 - \theta^\varepsilon(x)) G^j(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)$ обладает свойством соленоидальности:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \operatorname{div} \left[(1 - \theta^\varepsilon(x)) G^j(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right] \cdot \nabla \varphi(x) dx = \\ - \int_{\Omega} \left[(1 - \theta^\varepsilon(x)) G^j(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla^2 \varphi(x) \right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx = 0 \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\end{aligned}\tag{42}$$

(без суммирования по j). Равенство нулю в (42) имеет место, поскольку $G^j(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla^2 \varphi(x) = 0$ поточечно в силу кососимметричности матрицы G^j . Аналогичным свойством соленоидальности обладает вектор $\operatorname{div} \left[((1 - \theta^\varepsilon(x))) P^j(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}) \zeta_j(x, y) \right]$:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \left[((1 - \theta^\varepsilon(x))) P^j(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}) \zeta_j(x, y) \right] \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega),\tag{43}$$

где проявляется кососимметричность матрицы $P^j(y, z)$.

Таким образом, учитывая (43) и (42), из (39) получаем

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} R_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx &= \int_{\Omega} (r_\varepsilon^1 + \tilde{r}_\varepsilon^2 + \tilde{r}_\varepsilon^3) \cdot \nabla \varphi dx \leq \\ &\leq (\|r_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{r}_\varepsilon^2\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{r}_\varepsilon^3\|_{L^2(\Omega)}) \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}).\end{aligned}\tag{44}$$

Структура функций r_ε^1 , \tilde{r}_ε^2 и \tilde{r}_ε^3 такова, что из (44) непосредственно не следует интересующая нас оценка (32). Далее покажем, как обойти это препятствие.

5. Доказательство H^1 -оценки

1. Рассмотрим наряду с обычным первым приближением (20) смещенное первое приближение:

$$\begin{aligned}v_\sigma^\varepsilon(x) &= u(x') + \varepsilon N(y') \cdot \nabla u(x') + \delta M(y', z) \cdot (I + \nabla_y N(y')) \nabla u(x'), \\ x' &= x - \delta \sigma, \quad y' = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon} \sigma, \quad z = \frac{x}{\delta}.\end{aligned}$$

Ему будет соответствовать выражение

$$R_{\varepsilon, \sigma}(x) = a \left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon} \sigma, \frac{x}{\delta} \right) \nabla v_\sigma^\varepsilon(x) - a^0 \nabla u(x - \delta \sigma)\tag{45}$$

и аналогичная (44) оценка

$$\int_{\Omega} R_{\varepsilon, \sigma} \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} (r_{\varepsilon, \sigma}^1 + \tilde{r}_{\varepsilon, \sigma}^2 + \tilde{r}_{\varepsilon, \sigma}^3) \cdot \nabla \varphi dx \leq$$

$$\leq (\|r_{\varepsilon,\sigma}^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{r}_{\varepsilon,\sigma}^2\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{r}_{\varepsilon,\sigma}^3\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (46)$$

Проинтегрировав соотношение (46) по $\sigma \in Z$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_Z \int_{\Omega} R_{\varepsilon,\sigma} \cdot \nabla\varphi dx d\sigma \leq \\ & \leq \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \sum_j \gamma_j \left(\int_{\Omega} \int_Z \left| b_j \left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \frac{x}{\delta} \right) U_j(x - \delta\sigma) \right|^2 d\sigma dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь коэффициент γ_j равен ε , $\frac{\delta}{\varepsilon}$, δ или ε^0 . Элементы $b_j(y, z)$ сформированы из $N_j(y)$, $M_j(y, z)$, $P^j(y, z)$, $G^j(y)$ и их производных, а $U_j(x)$ состоят из градиентов ∇u , $\nabla^2 u$, умноженных, быть может, на ограниченные функции $\theta^\varepsilon(x)$ или $\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon(x)$. Оценим сверху интегралы из суммы (47).

Например, выражение (см. (41))

$$\tilde{r}_{\varepsilon,\sigma}^3 = \delta \operatorname{div} [\theta^\varepsilon(x') P^j(y', z) \zeta_j(x', y')] - \frac{\delta}{\varepsilon} \operatorname{div}_y (P^j(y', z) \zeta_j(x', y')) - \delta P^j(y', z) \nabla_x \zeta_j(x', y'),$$

где

$$\zeta_j(x', y') = \frac{\partial u(x')}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} (N(y') \cdot \nabla u(x')), \quad x' = x - \delta\sigma, \quad y' = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \quad z = \frac{x}{\delta},$$

дает вклад в сумму (47) в виде интегралов

$$\int_{\Omega} \int_Z |p^j(y', z) \theta^\varepsilon(x') \zeta_j(x', y')|^2 d\sigma dx, \quad \int_{\Omega} \int_Z |P^j(y', z) (\delta \nabla \theta^\varepsilon(x')) \zeta_j(x', y')|^2 d\sigma dx, \quad (48)$$

$$\int_{\Omega} \int_Z |\operatorname{div}_y (P^j(y', z) \zeta_j(x', y'))|^2 d\sigma dx, \quad \int_{\Omega} \int_Z |P^j(y', z) \nabla_x \zeta_j(x', y')|^2 d\sigma dx. \quad (49)$$

Интегралы из (48) не содержат малого множителя типа ε , δ в сумме (47), но они сами малы, так как благодаря срезающим функциям их можно оценить, используя неравенство для следа

$$\|\varphi\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)}^2 \leq c\varepsilon \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad c = \operatorname{const}(d, \Omega). \quad (50)$$

Например, для одного из этих интегралов имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Z |P^j(y', z) (\delta \nabla \theta^\varepsilon(x')) \zeta_j(x', y')|^2 d\sigma dx \stackrel{(40)}{\leq} \\ & \leq \int_{\Gamma_\varepsilon} \int_Z |P^j(y', z) \zeta_j(x', y')|^2 d\sigma dx \leq \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} \int_Z |P^j(y, z + \sigma) \zeta_j(x, y)|^2 d\sigma dx \leq \\ & \leq c \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \stackrel{(50)}{\leq} c_2 \varepsilon (\|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega)}) \leq C\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Здесь на втором и третьем шаге использованы те же соображения, что при выводе леммы 3.1 – замена переменной и интегрирование по дополнительному параметру σ .

Оценим один из интегралов типа (49):

$$\int_{\Omega} \int_Z |\operatorname{div}_y (P^j(y', z) \zeta_j(x', y'))|^2 d\sigma dx \leq$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\varepsilon} \int_Z |(\operatorname{div}_y P^j(y, z + \sigma)) \zeta_j(x, y) + P^j(y, z + \sigma) \nabla_y \zeta_j(x, y)|^2 d\sigma dx \leq \\
& c \int_{\Omega_\varepsilon} \int_Z |\operatorname{div}_y P^j(y, z + \sigma)|^2 |\nabla u(x)|^2 d\sigma dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \int_Z |P^j(y, z + \sigma) \nabla^2 N(y) \nabla u(x)|^2 d\sigma dx \leq \\
& c_1 \sup_y \|\nabla_y P^j(y, \cdot)\|_{L^2(Z)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sup_y \|P^j(y, \cdot)\|_{L^2(Z)}^2 \int_{\Omega_1} |\nabla^2 N(\frac{x}{\varepsilon}) \nabla u(x)|^2 dx \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

где использованы свойства функций N_j , P^j и u (см. лемму 2.1 и оценку (5)), оценки типа (25) и (27), а также свойства оператора продолжения (6).

Все оставшиеся интегралы в (48) и (49) можно оценить, применяя аналогичные соображения. То же верно для других интегралов в сумме (47), возникающих из представления типа (44). В итоге имеем оценку

$$\left| \int_Z \int_\Omega R_{\varepsilon, \sigma} \cdot \nabla \varphi dx d\sigma \right| \leq C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (51)$$

2. Теперь попробуем заменить в (51) $R_{\varepsilon, \sigma}$ на выражение \hat{R}_ε , определенное в (30). Справедливо следующее неравенство

$$\left\| \int_Z R_{\varepsilon, \sigma} d\sigma - \hat{R}_\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (52)$$

Действительно, запишем $\int_Z R_{\varepsilon, \sigma} d\sigma$ подробно

$$\begin{aligned}
\int_Z R_{\varepsilon, \sigma} d\sigma &= \int_Z a(y - \frac{\delta}{\varepsilon} \sigma, z) \left(\nabla u(x - \delta \sigma) + \varepsilon \nabla [N(y - \frac{\delta}{\varepsilon} \sigma) \cdot \nabla u(x - \delta \sigma)] + \right. \\
&+ \delta \nabla [M(y - \frac{\delta}{\varepsilon} \sigma, z) \cdot (I + \nabla N(y - \frac{\delta}{\varepsilon} \sigma)) \nabla u(x - \delta \sigma)] \left. \right) d\sigma - a^0 \int_Z \nabla u(x - \delta \sigma) d\sigma, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad z = \frac{x}{\delta}.
\end{aligned}$$

Заменим матрицу $a(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon} \sigma, \frac{\delta}{\varepsilon})$ на $a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta})$ с погрешностью $O(\frac{\delta}{\varepsilon})$ в силу свойства липшицевости, в результате чего, используя обозначение для корректора из (23), имеем

$$\begin{aligned}
& \int_Z R_{\varepsilon, \sigma}(x) d\sigma = \\
&= a^\varepsilon(x) \left[\int_Z \nabla u(x - \delta \sigma) d\sigma + \nabla K_\varepsilon(x) \right] - a^0 \int_Z \nabla u(x - \delta \sigma) d\sigma + O(\frac{\delta}{\varepsilon}). \quad (53)
\end{aligned}$$

Заметим, что $\int_Z \varphi(x - \delta \sigma) d\sigma = (\varphi)_\delta(x)$ есть сглаживание по Стеклову функции $\varphi(x)$. Известно, что $(\varphi)_\delta(x)$ аппроксимирует саму функцию $\varphi(x)$ с оценкой

$$\|(\varphi)_\delta - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq c\delta \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad c = \operatorname{const}(d).$$

Поэтому в (53) с учетом оценки (5) опускаем сглаживание по Стеклову для ∇u , после чего приходим к соотношению

$$\int_Z R_{\varepsilon,\sigma}(x) d\sigma = a^\varepsilon(x)(\nabla u(x) + \nabla K_\varepsilon(x)) - a^0 \nabla u(x) + O(\max\{\delta, \frac{\delta}{\varepsilon}\}) \stackrel{(23)}{=} \\ a^\varepsilon(x) \hat{v}^\varepsilon(x) - a^0 \nabla u(x) + O(\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}) \stackrel{(30)}{=} \hat{R}_\varepsilon + O(\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}),$$

то есть оценка (52) получена.

В итоге из (51), (52) имеем

$$\int_\Omega \hat{R}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx \leq C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (54)$$

Таким образом, установлены соотношение (32) и как следствие оценка (33).

3. Теперь по неравенству Пуанкаре записываем оценку

$$\|\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_P \left(\|\nabla(\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\int_\Omega (\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon) dx \right)^2 \right). \quad (55)$$

Учитывая, что $\int_\Omega u^\varepsilon dx = \int_\Omega u dx = 0$, имеем

$$\int_\Omega (\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon) dx = \int_\Omega K_\varepsilon dx.$$

В §3 фактически было доказано свойство

$$\|K_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max\{\varepsilon, \delta\} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Таким образом, из (55) и (33) вытекает оценка

$$\|\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

и в итоге получаем H^1 -оценку (28). Теорема 4.1 доказана.

4. Оценку (54) можно записать в несколько уточненном виде. Для этого в сумме (47) слагаемые с множителями $\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon(x)$ и $\theta^\varepsilon(x)$ не надо огрублять так, как раньше. В результате получается оценка

$$\left| \int_\Omega \hat{R}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx \right| \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} (\sqrt{\varepsilon} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Gamma_{2\varepsilon})} + \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}). \quad (56)$$

При выводе (54) важную роль играли следующие свойства нулевого приближения u :

- 1) $u \in H^2(\Omega)$ с оценкой $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}$;
- 2) неравенство для градиента ∇u в окрестности границы $\partial\Omega$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx \leq c\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (57)$$

Второе свойство есть следствие первого. Отметим, что свойство (57) справедливо и для градиента исходной задачи ∇u^ε , хотя ∇u^ε необязательно принадлежит $H^2(\Omega)$.

Лемма 5.1. Пусть u^ε – решение задачи (1). Тогда выполнена оценка

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

где C того же типа, что и в (7).

Доказательство. Запишем равенство

$$u^\varepsilon = (u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon) + \hat{v}^\varepsilon = (u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon) + u + K_\varepsilon,$$

где \hat{v}^ε есть H^1 -приближение к решению u^ε (см. (23)). Отсюда

$$\nabla u^\varepsilon = \nabla(u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon) + \nabla u + \nabla K_\varepsilon,$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq \int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla(u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon)|^2 dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla K_\varepsilon|^2 dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим каждый из интегралов I_1 , I_2 и I_3 :

$$I_1 \leq \|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \stackrel{(28)}{\leq} C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2;$$

$$I_2 \stackrel{(57)}{\leq} c\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2;$$

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} (|\nabla u|^2 + \max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\} |\nabla^2 u|^2) dx \leq \\ &\leq c(\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2, \delta^2\} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2), \end{aligned}$$

что устанавливается с помощью рассуждений из §3 и неравенства для следа.

6. Вывод L^2 -оценки

Для произвольной функции $\Phi \in \tilde{L}^2(\Omega)$ рассмотрим краевую задачу Неймана

$$\varphi^\varepsilon \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad -\operatorname{div}[a_T^\varepsilon(x) \nabla \varphi^\varepsilon(x)] = \Phi, \tag{58}$$

где $a_T^\varepsilon(x)$ – транспонированная к (2) матрица.

Для решения φ^ε выполнены энергетическая оценка

$$\|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 \|\Phi\|_{L^2(\Omega)} \tag{59}$$

и оценка для градиента вблизи границы (см. лемму 5.1)

$$\|\nabla \varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_{2\varepsilon})} \leq C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\} \|\Phi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{60}$$

Исходя из интегрального тождества для задачи (58) с пробной функцией

$$w^\varepsilon = \hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon$$

имеем

$$\int_{\Omega} \Phi w^{\varepsilon} dx = \int_{\Omega} a_T^{\varepsilon} \nabla \varphi^{\varepsilon} \cdot \nabla w^{\varepsilon} dx = \int_{\Omega} \nabla \varphi^{\varepsilon} \cdot a^{\varepsilon} \nabla w^{\varepsilon} dx \stackrel{(29)}{=} \int_{\Omega} \hat{R}_{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi^{\varepsilon} dx,$$

где в силу (56), (59), (60)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{R}_{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi^{\varepsilon} dx &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} (\sqrt{\varepsilon} \|\nabla \varphi^{\varepsilon}\|_{L^2(\Gamma_{2\varepsilon})} + \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|\nabla \varphi^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}) \leq \\ &\leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|\Phi\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Отсюда, взяв $\Phi = w^{\varepsilon} - \int_{\Omega} w^{\varepsilon} dx$, получаем

$$\|\Phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

В итоге, поскольку $\int_{\Omega} w^{\varepsilon} dx = \int_{\Omega} K_{\varepsilon} dx = O(\varepsilon)$, что уже показано раньше, выводим

$$\|\hat{v}^{\varepsilon} - u^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Отсюда уже получается L^2 -оценка (7), так как

$$\|u^{\varepsilon} - u\|_{L^2(\Omega)} = \|u^{\varepsilon} - \hat{v}^{\varepsilon} + K_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^{\varepsilon} - \hat{v}^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + O(\varepsilon).$$

Теорема 1.1 доказана.

Для задачи Неймана с ε -периодической матрицей $a^{\varepsilon}(x)=a(x/\varepsilon)$ L^2 -оценка порядка $O(\varepsilon)$ впервые получена в [15].

7. Доказательство вспомогательных утверждений

Приведем доказательство леммы 2.1.

Из интегрального тождества для первой задачи на ячейке

$$\operatorname{div}_z [a(y, z)(e^j + \nabla_z M_j(y, z))] = 0$$

легко получить равенство форм

$$\int_Z a(y, z)(e^j + \nabla_z M_j(y, z)) \cdot (e^j + \nabla_z M_j(y, z)) dz = \int_Z a(y, z)(e^j + \nabla_z M_j(y, z)) \cdot e^j dz.$$

Оценивая левую форму снизу, а правую – сверху по условию (3)₂ на матрицу $a(y, z)$, имеем

$$\mu \int_Z |e^j + \nabla_z M_j(y, \cdot)|^2 dz \leq \mu^{-1} \int_Z |e^j + \nabla_z M_j(y, \cdot)| dz \leq \mu^{-1} \left(\int_Z |e^j + \nabla_z M_j(y, \cdot)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}},$$

что дает

$$\left(\int_Z |e^j + \nabla_z M_j(y, \cdot)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu^{-2}. \quad (61)$$

Отсюда следует, что

$$\|M_j(y, \cdot)\|_{H_{per}^1(Z)} \leq c, \quad c = \operatorname{const}(\mu),$$

и свойство $i)$ доказано.

Докажем липшицевость функции $M_j(y, z)$ по переменной y . Положим:

$$M_j^h(y, z) = M_j(y + h, z), \quad a^h(y, z) = a(y + h, z).$$

Для решений уравнений

$$\operatorname{div}_z[a^h(y, z)(e^j + \nabla_z M_j^h(y, z))] = 0, \quad \operatorname{div}_z[a(y, z)(e^j + \nabla_z M_j(y, z))] = 0.$$

запишем интегральные тождества на пробной функции $\varphi(z) = M_j^h(\cdot, z) - M_j(\cdot, z)$. Вычитанием получаем

$$\begin{aligned} \int_Z (a^h(y, z)(e^j + \nabla_z M_j^h(y, z)) - a(y, z)(e^j + \nabla_z M_j(y, z))) \cdot \nabla \varphi(z) dz &= 0, \\ \int_Z a^h \nabla_z (M_j^h - M_j) \cdot \nabla_z (M_j^h - M_j) dz &= - \int_Z (a^h - a)(e^j + \nabla_z M_j) \cdot \nabla_z (M_j^h - M_j) dz. \end{aligned}$$

Используя условие $(3)_1$ и доказанное уже свойство ограниченности $M(y, z)$, выводим

$$\begin{aligned} \mu \int_Z |\nabla_z (M_j^h - M_j)|^2 dz &\leq c_L |h| \left(\int_Z |e^j + \nabla_z M_j|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Z |\nabla_z (M_j^h - M_j)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(61)}{\leq} \\ &\mu^{-2} |h| c_L \left(\int_Z |\nabla_z (M_j^h - M_j)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left(\int_Z |\nabla_z (M_j^h - M_j)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu^{-3} c |h|,$$

и липшицевость $M_j(\cdot, z)$ как функции со значениями в $H_{per}^1(Z)$ доказана.

Докажем липшицевость матрицы $\hat{a}(y)$, где

$$\hat{a}(y) = \langle a(y, \cdot)(I + \nabla_z M(y, \cdot)) \rangle_Z,$$

$$\hat{a}^h(y) = \hat{a}(y + h) = \langle a(y + h, \cdot)(I + \nabla_z M(y + h, \cdot)) \rangle_Z.$$

Для разности $\hat{a}^h(y) - \hat{a}(y)$ имеем

$$\begin{aligned} (\hat{a}^h(y) - \hat{a}(y)) &= \int_Z (a^h(y, z)(I + \nabla_z M^h) - a(y, z)(I + \nabla_z M)) dz = \\ &= \int_Z [a^h(I + \nabla_z M^h) - a(I + \nabla_z M^h) + a(I + \nabla_z M^h) - a(I + \nabla_z M)] dz = \\ &= \int_Z [(a^h - a)(I + \nabla_z M^h) - a \nabla_z (M - M^h)] dz. \end{aligned}$$

Откуда, в силу доказанных уже свойств $i)$ и $ii)$, следует

$$|\hat{a}^h(y) - \hat{a}(y)| \leq c_L |h| \int_Z |I + \nabla_z M^h| dz + \mu^{-1} \int_Z |\nabla_z (M^h - M)| dz \leq c |h|,$$

что и требуется.

Уравнение (9) можно записать как

$$\operatorname{div}_y(\hat{a}(y)\nabla N_j(y)) = -\operatorname{div}_y(\hat{a}(y)e^j).$$

Поскольку $\hat{a}(y)$ липшицева и, значит, $\operatorname{div}_y(\hat{a}(y)e^j) \in L^p(Y)$, к нему применима эллиптическая теория [16, гл. III, §15], что обеспечивает свойство v .

Перейдем к утверждениям iv) и vi). Ограниченность решений обеих задач на ячейке следует из обобщенного принципа максимума [17, гл. II, Приложение В]. Покажем, что ограничен также градиент $\nabla_y N_j(y)$. Продифференцируем уравнение (9), что возможно, благодаря липшицевости матрицы $\hat{a}(y)$. Имеем

$$\operatorname{div}_y \left[\hat{a}(y) \nabla_y \left(\frac{\partial N_j(y)}{\partial y_k} \right) + \frac{\partial \hat{a}(y)}{\partial y_k} (e^j + \nabla_y N_j(y)) \right] = 0, \quad k = 1, \dots, d.$$

Вводим обозначение $v_k = \frac{\partial N_j}{\partial y_k}$ и получаем систему относительно вектора $v = \{v_k\}$,

$$\operatorname{div}_y [\hat{a}(y) \nabla v_k + \frac{\partial \hat{a}(y)}{\partial y_k} (e^j + v)] = 0, \quad k = 1, \dots, d.$$

Известно [16, гл. VII, §2], что решение v такой диагональной системы принадлежит $L^\infty(Y)$. Отсюда выводим, что $\nabla_y N_j \in L^\infty(Y)$.

Лемма доказана.

Литература

- [1] М.Ш. Бирман, Т.А. Суслина. "Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства усреднения", *Алгебра и анализ*, **15**, No 5, 1-108 (2003)
- [2] В.В. Жиков. "Об операторных оценках в теории усреднения", *Доклады РАН*, **403**, No 3, 305-308 (2005)
- [3] В.В. Жиков. "О некоторых оценках из теории усреднения", *Доклады РАН*, **406**, No 5, 597-601 (2006)
- [4] С.Е. Пастухова. "О некоторых оценках из усреднения задач теории упругости", *Доклады РАН*, **406**, No 5, 604-608 (2006)
- [5] V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova. "On operator estimates for some problems in homogenization theory", *Russian Journal of Mathematical Physics*, **12**, No 4, 515-524 (2005)
- [6] V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova. "Estimates of homogenization for a parabolic equations with periodic coefficients", *Russian Journal of Mathematical Physics*, **13**, No 2, 351-365 (2006)
- [7] С.Е. Пастухова. "Операторные оценки в нелинейных задачах повторного усреднения", *Труды математического института им В.А. Стеклова*, **261**, 121-134 (2007)
- [8] С.Е. Пастухова, Р.Н. Тихомиров. "Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения", *Доклады РАН*, **415**, No 3, 304-309 (2007)
- [9] S.E. Pastukhova. "Estimates in homogenization for parabolic equations with locally periodic coefficients", *Asymptotic Analysis*, **66**, No 3-4, 207-228 (2010)
- [10] С.Е. Пастухова. "Аппроксимация экспоненты оператора диффузии с многомасштабными коэффициентами", *Функциональный анализ и его приложения*, **48**, No 3, 34-51 (2014)
- [11] S.E. Pastukhova. "Dirichlet problem for elliptic equations with multiscale coefficients: operator estimates of homogenization", *Journal of Math. Sci.*, **192**, no. 2, p. 283-300 (2013)
- [12] С.Е. Пастухова. "Задача Неймана для эллиптических уравнений с многомасштабными коэффициентами: операторные оценки усреднения", *Матем. сб.*, **207**, No 2, 1-22 (2016)
- [13] В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М. (1993)
- [14] A. Bensoussan, I. L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structure*, North-Holland, Amsterdam (1978)
- [15] Т.А. Suslina. "Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients", *SIAM J. Math. Anal.*, **45**, no. 6, p.3453-3493 (2013)

- [16] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М. (1964)
- [17] Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М. (1983)